(A)

Théorème d'interversion limite / différentielle

Leçon : 215

Réf. : Rouvière, PGdCD exercice 39 p 117 (4e édition) (modifié)

Th. :

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} : U \to \mathbb{R}^p$ suite d'applications de classe $\mathcal{C}^1$

Si : 1) $\exists x_0 \in U$ tq $(f_k(x_0))_k$ converge (dans $\mathbb{R}^p$)

2) U est connexe

3) $(df_k)_k : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ converge localement uniformément vers $\phi : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$

Alors : $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers une fonction $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$, et $df(x) = \lim\limits_{k \to +\infty} df_k(x) = \phi(x)$ $\forall x \in U$

Application :

$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calcul de $d\exp$

Théorème :

1) Mq (f_k) CVS sur U (raisonnement par connexité)

Soit $\mathcal{C} = \{ x \in U \,/\, (f_k(x)) \text{ converge} \}$. Mq $\mathcal{C} = U$

a°/ $\mathcal{C} \subset U$ et $x_0 \in \mathcal{C}$ donc $\mathcal{C}$ est non vide.

$\mathbb{R}^p$ est complet, donc on peut réécrire

$\mathcal{C} = \{ x \in U \,/\, (f_k(x)) \text{ est de Cauchy} \}$

Soit $x \in U$ et $R > 0$ tq $\cdot$ $B(x, U) \subset U$

$\cdot$ $(df_k)_k$ CVU sur $B(x, R)$.

Soient $y, z \in B(x, U)$ et $k, l \in \mathbb{N}$.

L'inégalité des accroissements finis appliquée à $f_l - f_k$ dans $B(x, U)$ qui est convexe nous donne :

$$\|(f_l(y) - f_k(y)) - (f_l(z) - f_k(z))\| \leq \sup_{a \in B(x,R)} \|d(f_l - f_k)(a)\| \, \|y - z\|$$

$$(*) \quad \|(f_l(y) - f_k(y)) - (f_l(z) - f_k(z))\| \leq \sup_{a \in B(x,R)} \|df_l(a) - df_k(a)\| \times 2R$$

$\Rightarrow$ "si $y \in \mathcal{C}$, alors $z \in \mathcal{C}$"

b°/ $\mathcal{C}$ ouvert dans U

On écrit $(*)$ avec : $x \in \mathcal{C}$, $y = x$, $z \in B(x, R)$

Alors $\cdot$ $(f_k(x))_k$ est de Cauchy

$\cdot$ $(df_k)_k$ CVU sur $B(x, R)$

donc $(f_k(z))_k$ est de Cauchy donc $z \in \mathcal{C}$ donc $B(x, R) \subset \mathcal{C}$

donc $\mathcal{C}$ est ouvert dans U

c°/ $\mathcal{C}$ fermé dans U

Soit $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ suite de $\mathcal{C}$, $z \in U$ tq $z_m \longrightarrow z$.

En écrivant $(*)$ dans $B(z, R)$,

$\exists\, m_0 \in \mathbb{N}$ tq $z_{m_0} \in B(z, R)$ donc $(f_k(z))_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy

donc $z \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est fermé dans U.

U est connexe donc $\mathcal{C} = U$

On note $f : U \to \mathbb{R}^p$ la limite simple de $(f_k)_k$.

Ⓐ

2) Mq $(f_k)_k$ cv localement uniformément vers f

(*) montre que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie localement un critère de de Cauchy uniforme, donc $\boxed{(f_k)_k \text{ cv localement uniformément vers } f}$.

Rq: f est alors "localement continue" donc continue.

3) Mq f est différentiable sur U et que $df = \phi$

Soit $x \in U$. On réécrit (*) avec $z = x$ et $y = x+h$ où $x+h \in B(x,R)$ en faisant tendre $\ell \to +\infty$

⚠ pas 2R

$$\boxed{(*)\quad \|(f(x+h) - f_k(x+h)) - (f(x) - f_k(x))\| \leq \sup_{a\in B(x,R)} \|\phi(a) - df_k(a)\| \, \|h\|}$$

On veut m.q.: $f(x+h) - f(x) - \phi(x)(h) = o(h)$.

$$\begin{aligned}\|f(x+h) - f(x) - \phi(x)(h)\| &\leq \|f(x+h) - f(x) - (f_k(x+h) - f_k(x))\| \quad ① \\ &+ \|f_k(x+h) - f_k(x) - df_k(x)(h)\| \quad ② \\ &+ \|df_k(x)(h) - \phi(x)(h)\| \quad ③\end{aligned}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$ tq $\sup_{a\in B(x,R)} \|\phi(a) - df_k(a)\| \leq \varepsilon$.

On a alors : d'après (*), ① $\leq \varepsilon \|h\|$

et ② $\leq \|df_k(x) - \phi(x)\| \, \|h\| \leq \varepsilon \|h\|$ $(x \in B(x,R)\ldots)$

- $\exists\, \eta > 0$ / $\|h\| \leq \eta \Rightarrow \|f_k(x+h) - f_k(x) - df_k(x)(h)\| \leq \varepsilon \|h\|$

car f_k est différentiable en x)

On a donc :

$\exists\, \eta > 0$ / $\|h\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x+h) - f(x) - \phi(x)(h)\| \leq 3\varepsilon \|h\|$

donc $\boxed{f \text{ est différentiable en tout } x \in U \text{ et } df(x) = \phi(x) = \lim_{k\to+\infty} df_k(x)}$

4) Mq f est $\mathcal{C}^1$

Comme au 2), $(df_k)_k$ converge localement uniformément vers df, donc df est "localement continue" donc continue.

Donc, $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } U}$

Application :

Rq: On admettra que $\sum_p \frac{X^p}{p!}$ CVS vers $\exp(X)$, vu qu'on va utiliser exactement le même raisonnement pour m.q. exp est $\mathcal{C}^1$.

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme d'algèbre.
- On pose pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\exp(X) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{X^p}{p!} = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p(X)$

1) Convergence ponctuelle de $\sum u_p$:

admis

2) Connexité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev, donc convexe, donc $\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est connexe}}$ (étoilé...)

3) u_p $\mathcal{C}^1$ et convergence localement uniforme de $\sum du_p$

- $X \longmapsto X^p$ est polynomiale donc $\mathcal{C}^1$ donc : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ u_p \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$

Soit $X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$

$$(X+H)^p = X^p + \underbrace{X^{p-1}H + X^{p-2}HX + \dots + HX^{p-1}}_{\in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))} + \underbrace{O(H^2)}_{\|\,\|\text{ norme d'algèbre}}$$

donc u_p est différentiable en tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\boxed{du_p(X)(H) = \frac{1}{p!}\left(X^{p-1}H + \dots + HX^{p-1}\right)} \quad \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Si $p = 0$, $u_0(X) = I_n$ $\forall X$ donc $\boxed{du_0 = 0}$.

Ⓐ

Si $p=1$, $u_1(X+H) = X+H$ donc $\boxed{du_1(X) = id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}$

- Soit $R>0$, $X \in B(0,R)$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $p \geq 2$, par inégalité triangulaire

$$\| du_p(X)(H) \| \leq \frac{1}{p!}\left(\|X^{p-1}H\| + \dots + \|HX^{p-1}\| \right)$$

$$\leq \frac{1}{p!} \|X\|^{p-1} \|H\|$$

norme d'algèbre (2 fois)

donc $$\| du_p(X) \| \leq \frac{1}{(p-1)!} \|X\|^{p-1}$$

norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

$$\leq \frac{R^{p-1}}{(p-1)!}$$

$$\boxed{\sup_{X \in B(0,R)} \| du_p(X) \| \leq \frac{R^{p-1}}{(p-1)!}} \quad / \quad \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{R^{p-1}}{(p-1)!} = e^R - 1$$

donc $\sum du_p$ CVN, donc CVU sur tout compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Par conséquent, $\boxed{\exp \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

et $$\boxed{\forall X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d\exp(X)(H) = H + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p!}\left(X^{p-1}H + \dots + HX^{p-1}\right)}$$